

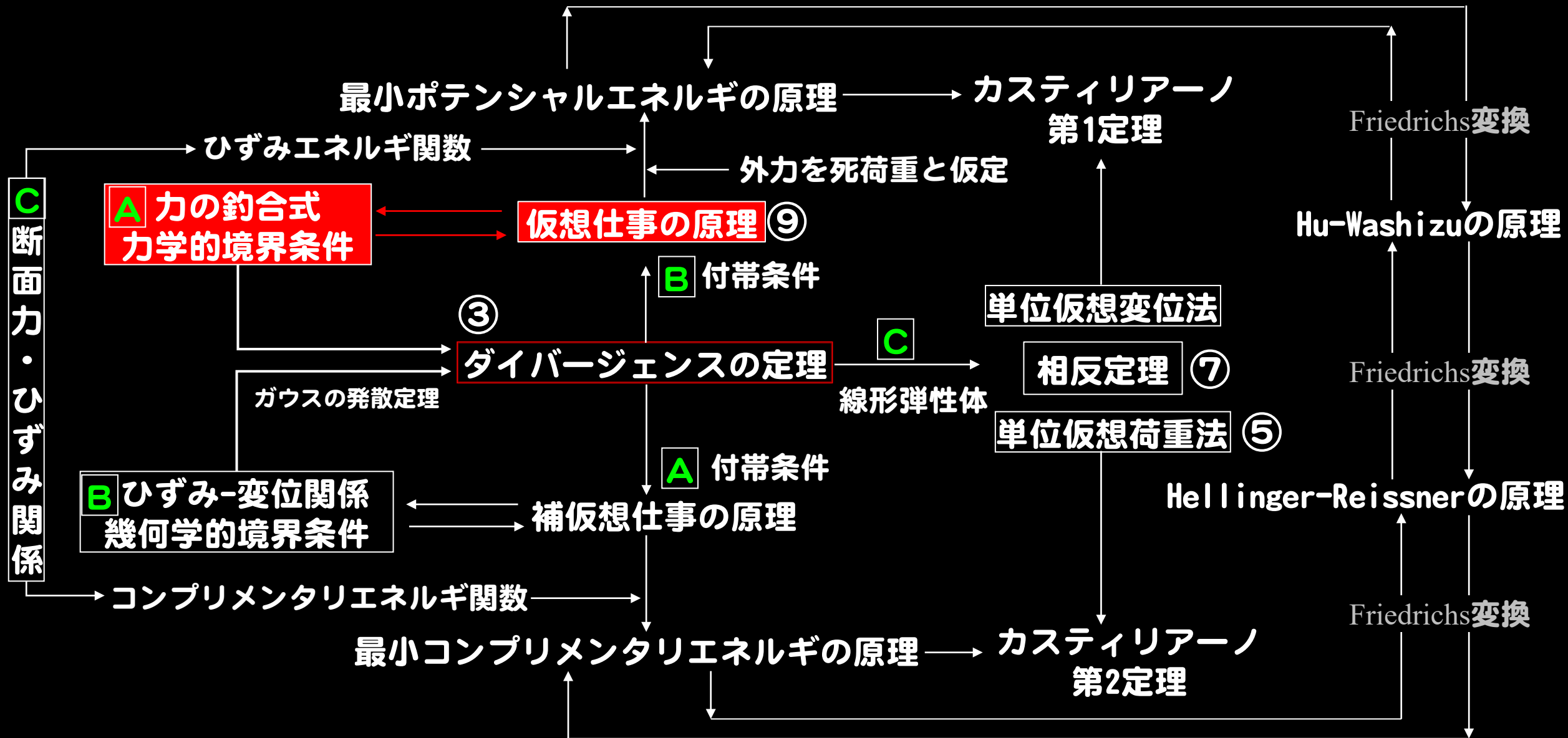
# 仮想仕事の原理



## ⑩ 仮想仕事の原理 例題

城戸將江・津田恵吾 2021.08

# 仕事の原理・エネルギー原理の全体像



# 仮想仕事の原理 1

## 仮想仕事の原理

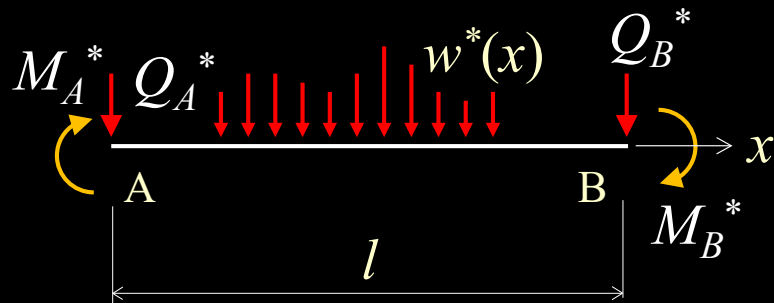
幾何学的境界条件を満足する任意の仮想変位と、  
この仮想変位に対応するひずみを適合系として、  
釣合系の外力のなす仮想仕事は内力のなす仮想仕事  
に等しい。

仮想仕事式より (任意の仮想変位に対して成り立つことより)  
釣合い式・力学的境界条件があぶりだされる。

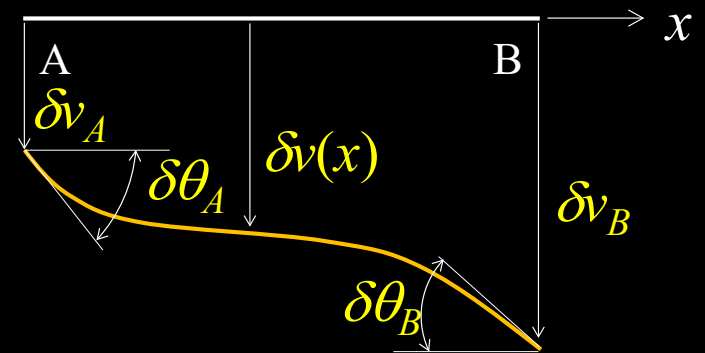
# 仮想仕事の原理 2

## 仮想仕事式

$$Q_A^* \cdot \delta v_A + M_A^* \cdot \delta \theta_A + Q_B^* \cdot \delta v_B + M_B^* \cdot \delta \theta_B + \int_0^l w^*(x) \delta v(x) dx = \int_0^l M^*(x) \cdot \delta \phi(x) dx$$



釣合系の外力

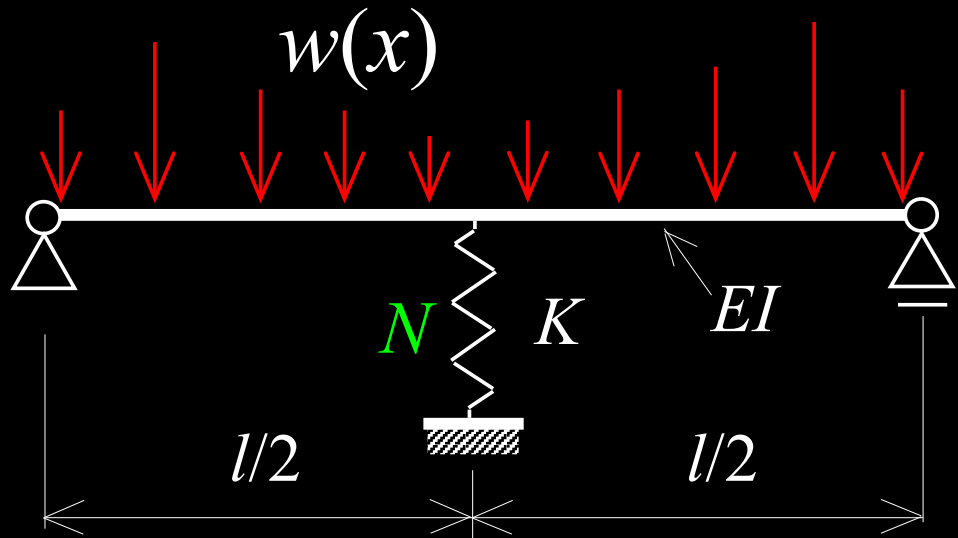


適合系の変位

$$\Sigma (\text{釣合系の 外力} \times \text{適合系の 仮想変位}) = \int (\text{釣合系の 曲げモーメント} \times \text{適合系の 曲率}) dx$$

剛体の場合  $\delta \phi \equiv 0$

# 例題1 仮想仕事式から釣合式の誘導1



仮想仕事式

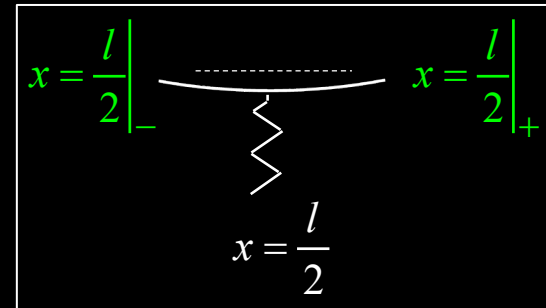
$$\int_0^l w(x) \delta v(x) dx = \int_0^l M(x) \cdot \delta \phi(x) dx + N \delta \Delta$$

$N$  : ばねの内力  
 $\delta \Delta$  : ばねの縮み

$$\int_0^l M(x) \cdot \delta \phi(x) dx = - \int_0^l M(x) \cdot \delta v''(x) dx$$

$$= \left[ -M(x) \cdot \delta v'(x) + M'(x) \cdot \delta v(x) \right]_0^l - \int_0^l M''(x) \cdot \delta v(x) dx$$

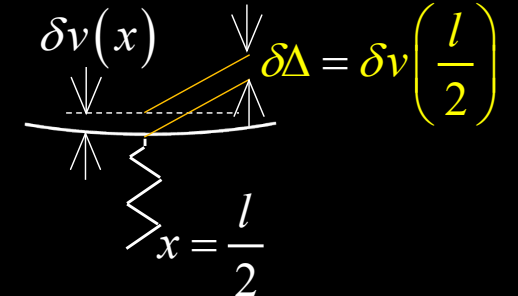
$$= \left[ -M(x) \cdot \delta v'(x) + M'(x) \cdot \delta v(x) \right]_0^{\frac{l}{2}-} + \left[ -M(x) \cdot \delta v'(x) + M'(x) \cdot \delta v(x) \right]_{\frac{l}{2}+}^l - \int_0^l M''(x) \cdot \delta v(x) dx$$



# 例題1 仮想仕事式から釣合式の誘導2

仮想仕事式

$$\int_0^l w(x) \delta v(x) dx = \int_0^l M(x) \cdot \delta \phi(x) dx + N \delta \Delta$$



↓  $\delta \Delta = \delta v\left(\frac{l}{2}\right)$  ばねの縮み  $\delta \Delta$  はたわみに等しい

$$\left[ -M(x) \cdot \delta v'(x) + M'(x) \cdot \delta v(x) \right]_0^{\frac{l}{2}-} + \left[ -M(x) \cdot \delta v'(x) + M'(x) \cdot \delta v(x) \right]_{\frac{l}{2}+}^l$$

$$- \int_0^l \left( M''(x) + w(x) \right) \cdot \delta v(x) dx + N \delta v\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

幾何学的境界条件より

$$\delta v(0) = \delta v(l) = 0$$

↓  $\delta v\left(\frac{l}{2}\right) = \delta v\left(\frac{l}{2}\right)_- = \delta v\left(\frac{l}{2}\right)_+$   $\delta v'\left(\frac{l}{2}\right) = \delta v'\left(\frac{l}{2}\right)_- = \delta v'\left(\frac{l}{2}\right)_+$

$$M(0) \cdot \delta v'(0) - M(l) \cdot \delta v'(l) + \left\{ M\left(\frac{l}{2}\right)_- - M\left(\frac{l}{2}\right)_+ \right\} \delta v'\left(\frac{l}{2}\right) - \left\{ M'\left(\frac{l}{2}\right)_- - M'\left(\frac{l}{2}\right)_+ + N \right\} \delta v\left(\frac{l}{2}\right) - \int_0^l \left( M''(x) + w(x) \right) \cdot \delta v(x) dx = 0$$

# 例題1 仮想仕事式から釣合式の誘導3

$$M(0) \cdot \delta v'(0) - M(l) \cdot \delta v'(l) + \left\{ M\left(\frac{l}{2}\right)_- - M\left(\frac{l}{2}\right)_+ \right\} \delta v'\left(\frac{l}{2}\right) - \left\{ M'\left(\frac{l}{2}\right)_- - M'\left(\frac{l}{2}\right)_+ + N \right\} \delta v\left(\frac{l}{2}\right) - \int_0^l \left( M''(x) + w(x) \right) \cdot \delta v(x) dx = 0$$



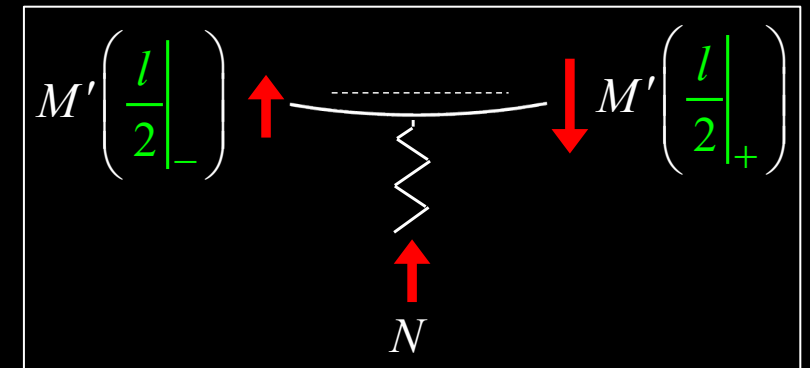
幾何学的境界条件を満足する**任意**の仮想変位 $\delta v$ に対して成り立つことより

$M''(x) + w(x) = 0$  外力 $w$ と断面力  $M$  の**釣合式**

$M(0) = M(l) = 0$  **力学的境界条件**

$M\left(\frac{l}{2}\right)_- - M\left(\frac{l}{2}\right)_+ = 0$   $x=l/2$ 近傍での曲げモーメントの連続条件

$M'\left(\frac{l}{2}\right)_- - M'\left(\frac{l}{2}\right)_+ + N = 0$   $x=l/2$ 近傍でのせん断力の釣合い式



# 例題1 仮想仕事式から釣合式の誘導4

断面力-ひずみ関係 ( $M=EI\phi$ ) , ひずみ-変位関係 ( $\phi=-v''$ ) ,  $N=Kv(l/2)$ を用いると  
下式となる

$$M''(x) + w(x) = 0 \Rightarrow EIV^{IV}(x) = w(x) \quad \text{釣合式}$$

$$M(0) = M(l) = 0 \Rightarrow -EIV''(0) = -EIV''(l) = 0 \quad \text{力学的境界条件}$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right)_- - M\left(\frac{l}{2}\right)_+ = 0 \Rightarrow -EIV''\left(\frac{l}{2}\right)_- + EIV''\left(\frac{l}{2}\right)_+ = 0 \quad \begin{array}{l} x=l/2 \text{近傍での} \\ \text{曲げモーメントの連続条件} \end{array}$$

$$M'\left(\frac{l}{2}\right)_- - M'\left(\frac{l}{2}\right)_+ + N = 0 \Rightarrow -EIV'''\left(\frac{l}{2}\right)_- + EIV'''\left(\frac{l}{2}\right)_+ + Kv\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad \begin{array}{l} x=l/2 \text{近傍での} \\ \text{せん断力の釣合い式} \end{array}$$

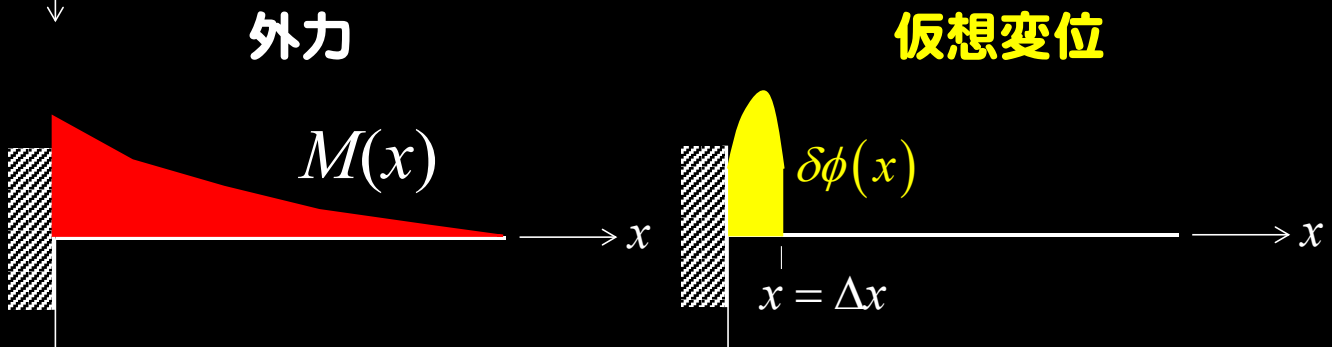
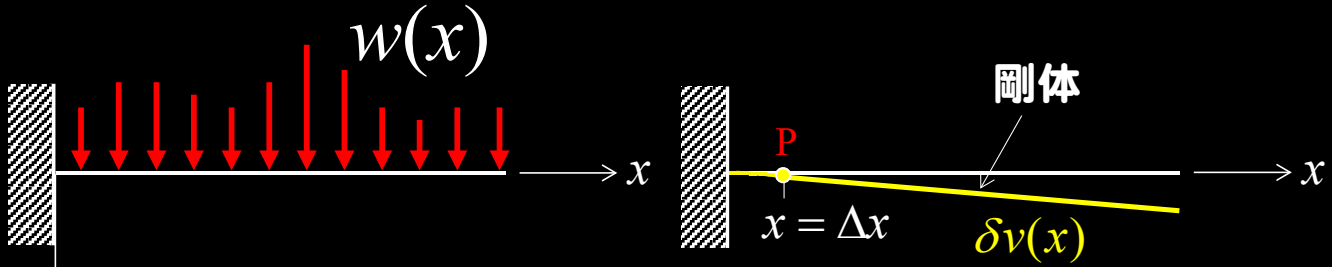
**幾何学的境界条件**  $v(0) = v(l) = 0$

**たわみとたわみ角の連続条件**  $v\left(\frac{l}{2}\right)_- = v\left(\frac{l}{2}\right)_+$  ,  $v'\left(\frac{l}{2}\right)_- = v'\left(\frac{l}{2}\right)_+$



# 例題2 仮想変位としてのヒンジ

## 仮想仕事式



外力  
断面力  
釣合系

仮想変位  
仮想変位に対応する曲率 (ひずみ)  
適合系  
仮想変位

$$\int_0^l w(x) \delta v(x) dx = \int_0^l M(x) \delta \phi(x) dx$$

$$\int_0^l M(x) \delta \phi(x) dx$$

$$= \int_0^{\Delta x} M(x) \delta \phi(x) dx + \int_{\Delta x}^l M(x) \cdot 0 dx$$

$$= \int_0^{\Delta x} M(x) \delta \phi(x) dx$$

積分の平均値の定理  
( $0 \leq x_1 \leq \Delta x$ )

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_0^{\Delta x} M(x) \delta \phi(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} M(x_1) \delta \phi(x_1) \Delta x$$

$$= M(0) \delta \phi(0) \Delta x = M(0) \delta \theta \quad (\delta \theta \equiv \delta \phi(0) \Delta x)$$

ある点で  $\delta \theta$  の回転が生じるとき、内力のなす仮想仕事はその点の曲げモーメントにその点の回転角を乗ずることによって算定できる。

# 例題3 外力と曲げモーメントの関係

**仮想仕事式**

$$P \cdot \delta v_C = M_A \cdot \delta \theta_A + M_C \cdot \delta \theta_C + M_B \cdot \delta \theta_B$$

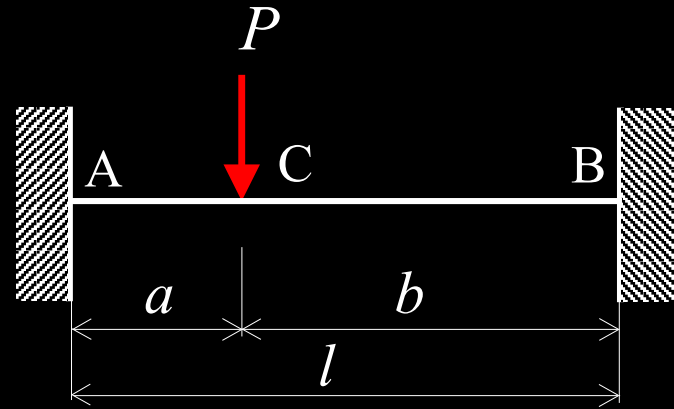
**ひずみ-変位関係・適合条件**

$$\delta v_C = a \delta \theta_A$$

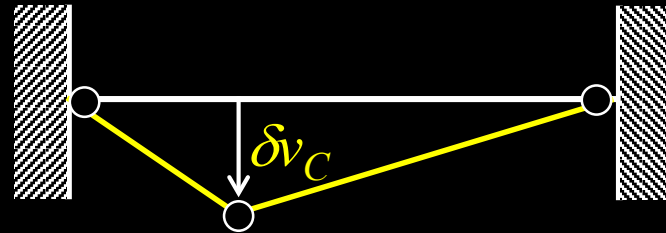
$$\delta \theta_B = \frac{a}{b} \delta \theta_A, \quad \delta \theta_C = \delta \theta_A + \delta \theta_B = \frac{l}{b} \delta \theta_A$$

$$P \cdot a \delta \theta_A = M_A \cdot \delta \theta_A + M_C \cdot \frac{l}{b} \delta \theta_A + M_B \cdot \frac{a}{b} \delta \theta_A$$

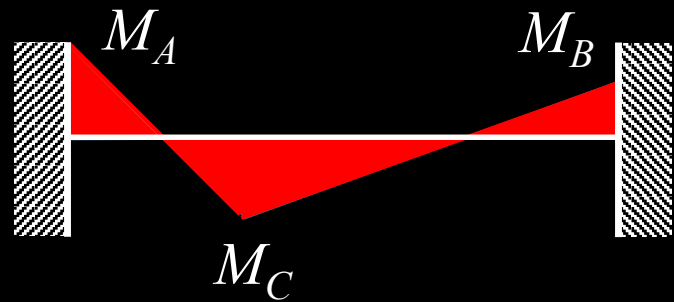
$$\therefore P \cdot ab = M_A \cdot b + M_C \cdot l + M_B \cdot a$$



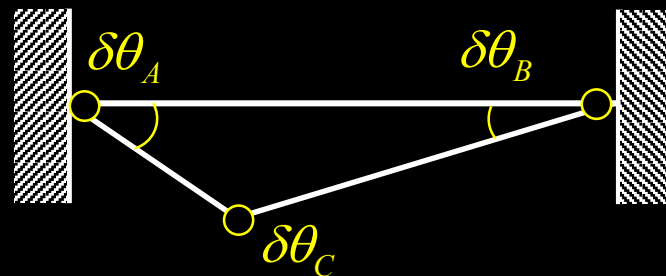
(a) 外力



(c) たわみ



(b) 断面力



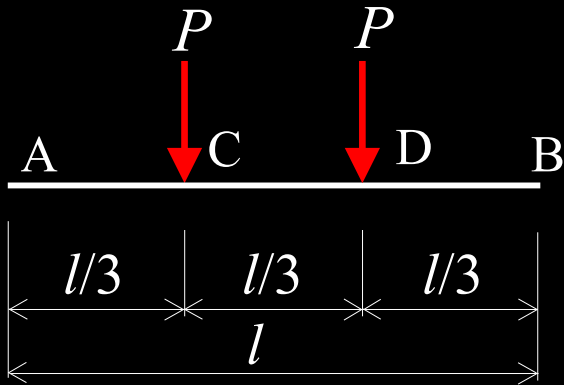
(d) ひずみ

**釣合系**

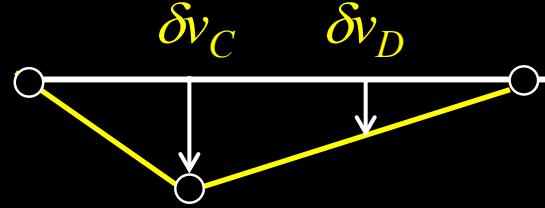
**適合系・仮想変位**

# 例題4 塑性ヒンジを生じた梁の梁端モーメント

**仮想仕事式**



(a) 外力



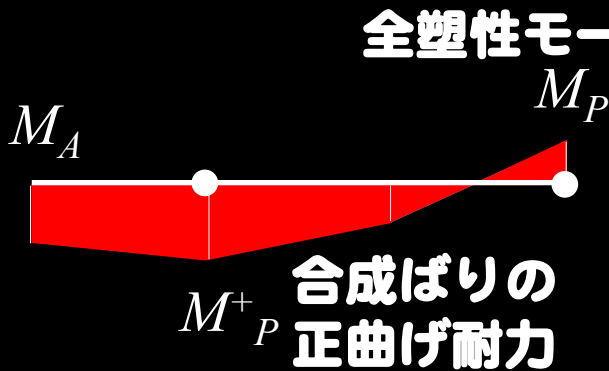
(c) たわみ

$$P \cdot \delta v_C + P \cdot \delta v_D = -M_A \cdot \delta \theta_A + M_P^+ \cdot \delta \theta_C + M_P \cdot \delta \theta_B$$

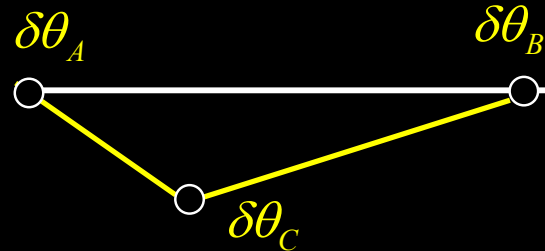
**ひずみ-変位関係・適合条件**

$$\delta v_C = \frac{l}{3} \delta \theta_A, \quad \delta v_D = \frac{l}{3} \delta \theta_B$$

$$\delta \theta_A = 2\delta \theta_B, \quad \delta \theta_C = \delta \theta_A + \delta \theta_B = 3\delta \theta_B$$



(b) 断面力



(d) ひずみ

$$M_A = \frac{1}{2} (3M_P^+ + M_P) - \frac{1}{2} Pl$$

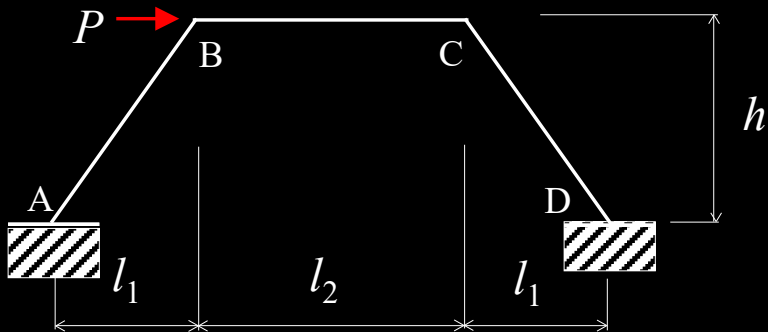
$$-M_P < M_A < M_P^+ \text{ より}$$

$$\frac{1}{3} Pl < M_P^+ + M_P < Pl \text{ で成立}$$

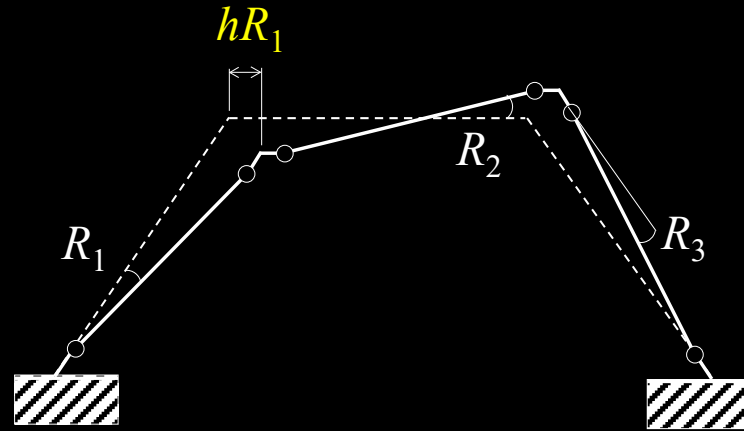
**釣合系**

**適合系・仮想変位**

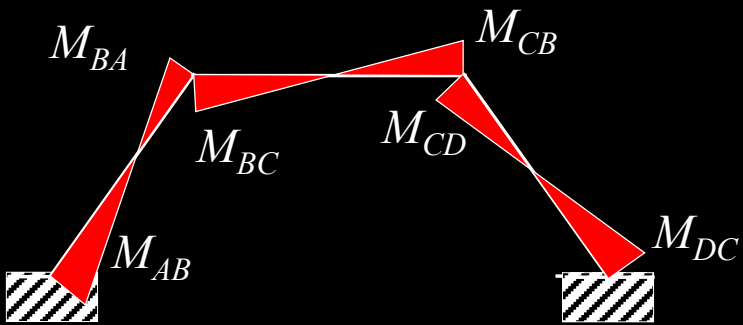
# 例題5 台形ラーメンの層方程式1 (仮想仕事式より)



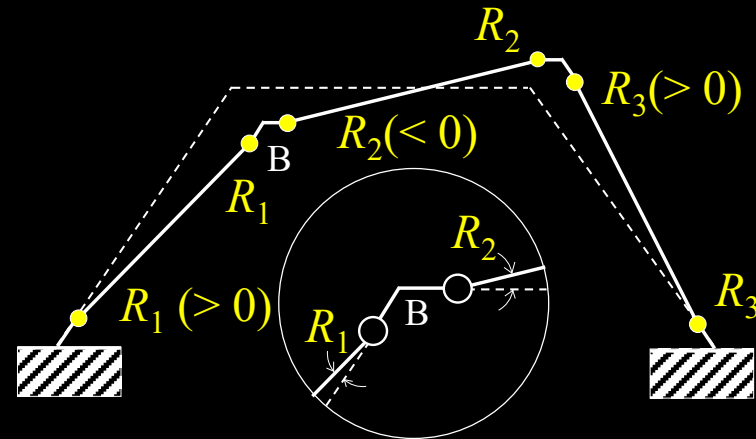
(a) 外力



(c) 仮想変位



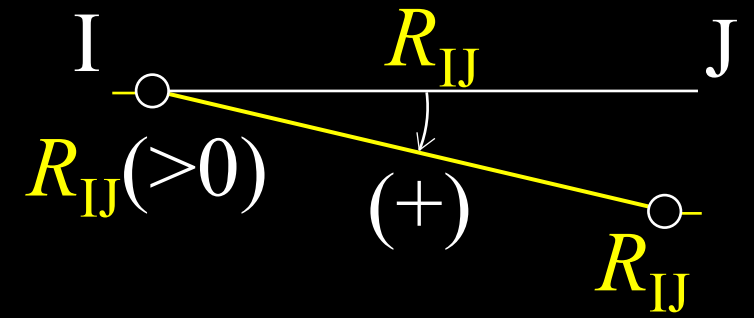
(b) 断面力



(d) ひずみ



釣合系



適合系 (仮想変位)  
部材角=ヒンジの回転角

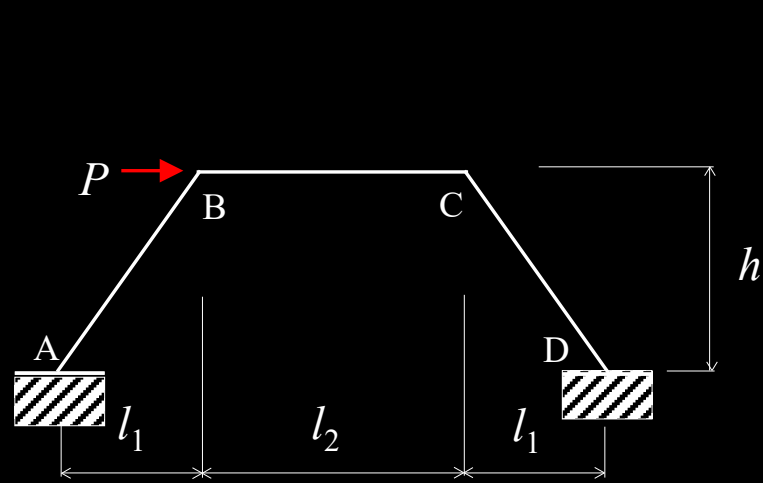
内力のなす仮想仕事

$$\begin{aligned}
 & -M_{IJ} \cdot R_{IJ} - M_{JI} \cdot R_{IJ} \\
 & = -(M_{IJ} + M_{JI}) R_{IJ}
 \end{aligned}$$

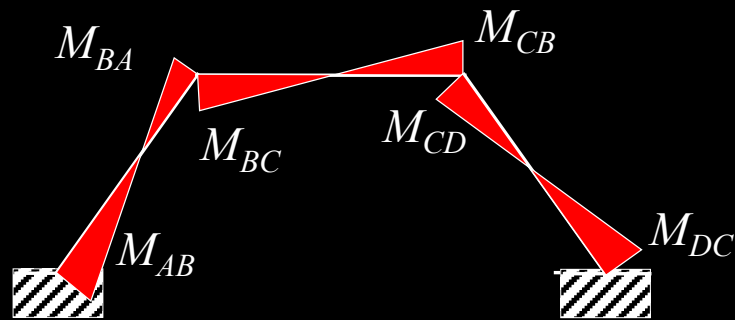
釣合系

適合系・仮想変位

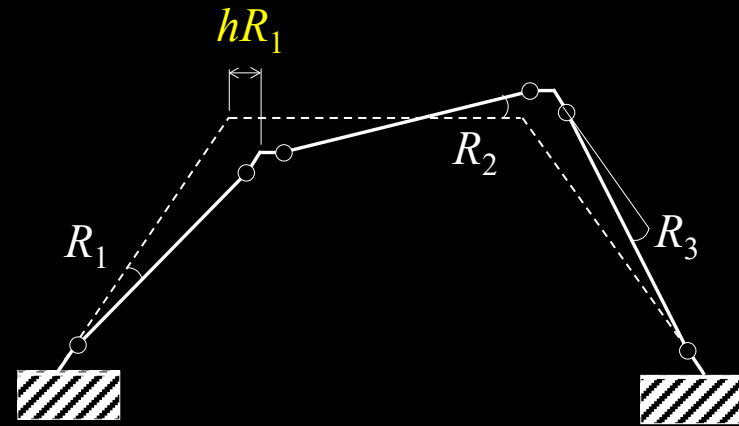
# 例題5 台形ラーメンの層方程式2 (仮想仕事式より)



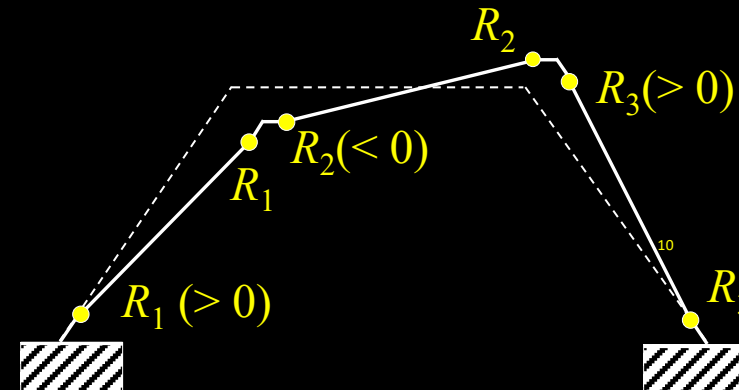
(a) 外力



(b) 断面力



(c) 仮想変位



(d) ひずみ

外力のなす仮想仕事

$$P \cdot hR_1$$

内力のなす仮想仕事

$$-(M_{AB} + M_{BA})R_1 - (M_{BC} + M_{CB})R_2 - (M_{CD} + M_{DC})R_3$$

角方程式

$$hR_1 - hR_3 = 0 \quad \text{水平方向}$$

$$l_1 \cdot R_1 + l_2 \cdot R_2 + l_1 \cdot R_3 = 0 \quad \text{鉛直方向}$$

$$\therefore R_1 = R_3, \quad R_2 = -\frac{2l_1}{l_2} R_1$$

釣合系

適合系・仮想変位

# 例題5 台形ラーメンの層方程式3 (仮想仕事式より)

## 仮想仕事式

外力のなす仮想仕事 = 内力のなす仮想仕事

$$P \cdot h R_1 = -(M_{AB} + M_{BA}) R_1 - (M_{BC} + M_{CB}) R_2 - (M_{CD} + M_{DC}) R_3$$

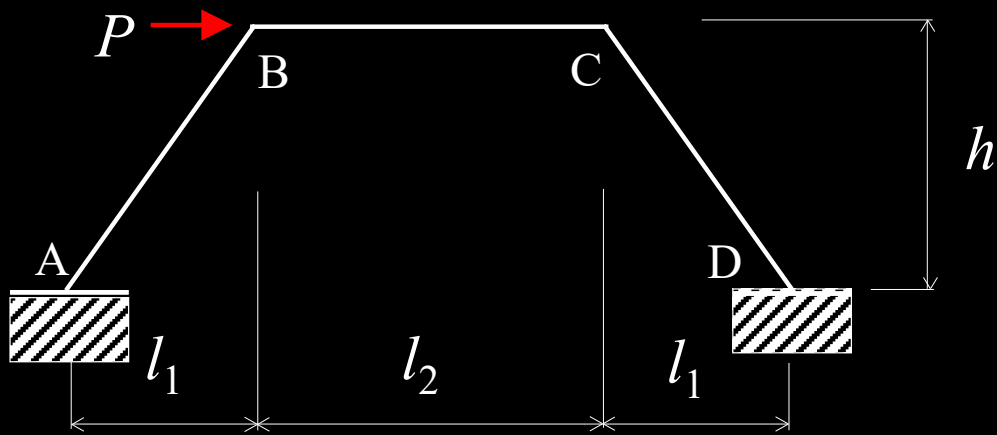
$$R_1 = R_3, \quad R_2 = -\frac{2l_1}{l_2} R_1$$

$$P \cdot h R_1 = -(M_{AB} + M_{BA}) R_1 - (M_{BC} + M_{CB}) \left( -\frac{2l_1}{l_2} R_1 \right) - (M_{CD} + M_{DC}) R_1$$

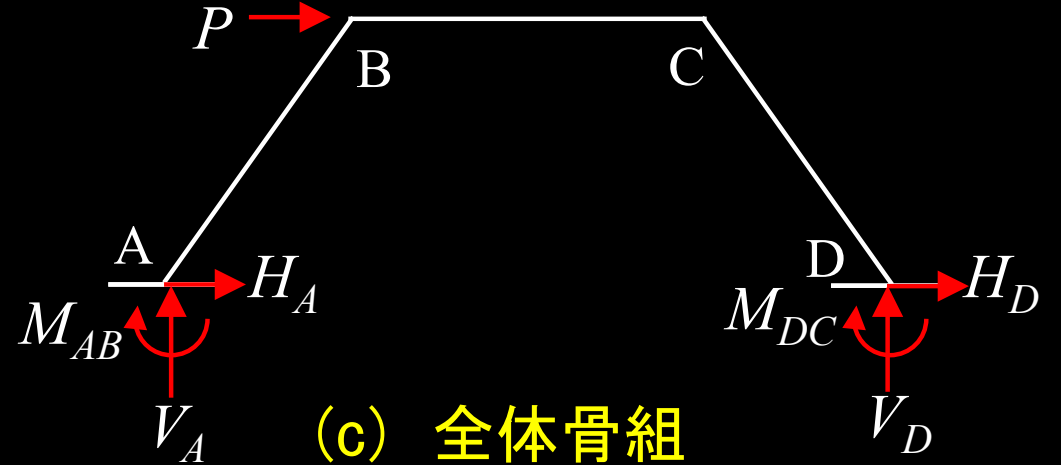
## 台形ラーメンの層方程式

$$M_{AB} + M_{BA} + (M_{BC} + M_{CB}) \left( -\frac{2l_1}{l_2} \right) + M_{CD} + M_{DC} + P \cdot h = 0$$

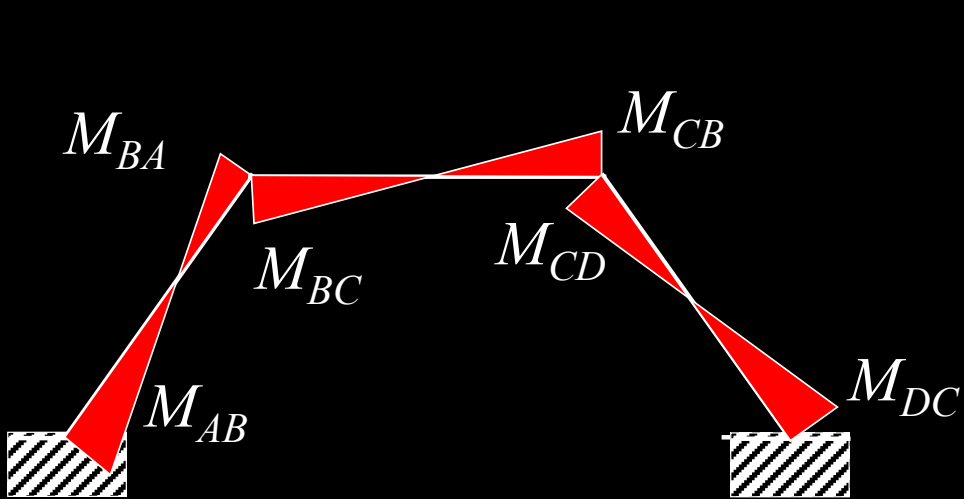
# 例題5 台形ラーメンの層方程式4 (釣合式より)



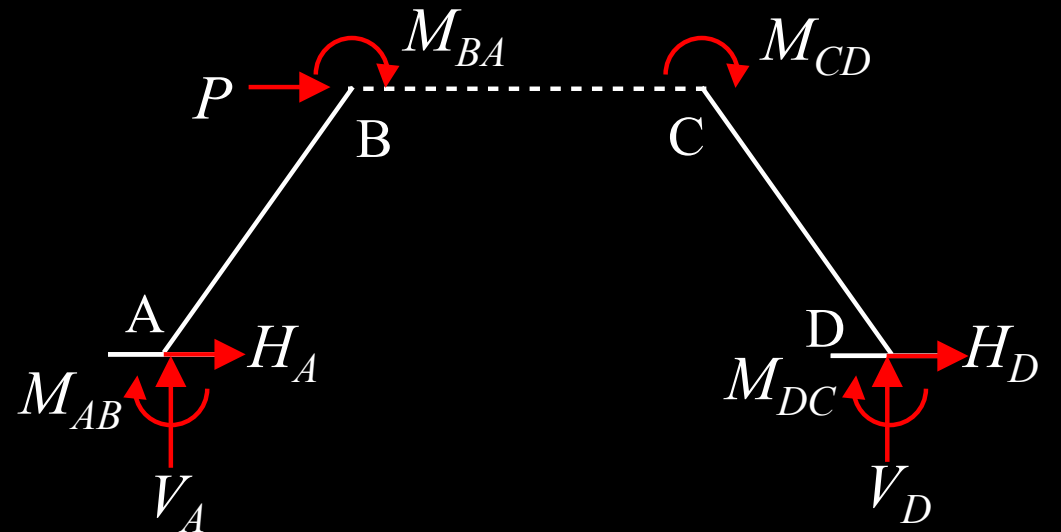
(a) 外力



(c) 全体骨組



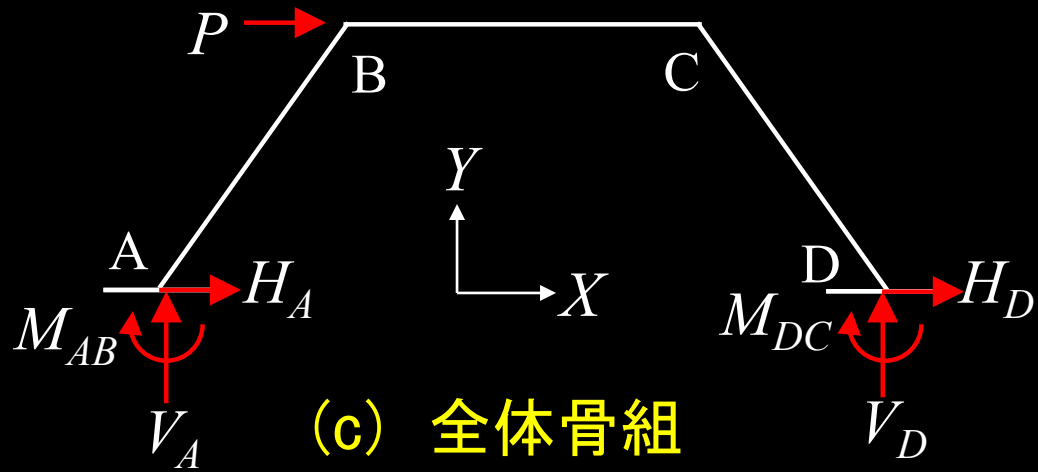
(b) 断面力



(d) AB材, CD材

# 例題5 台形ラーメンの層方程式5 (釣合式より)

## (c) 全体骨組

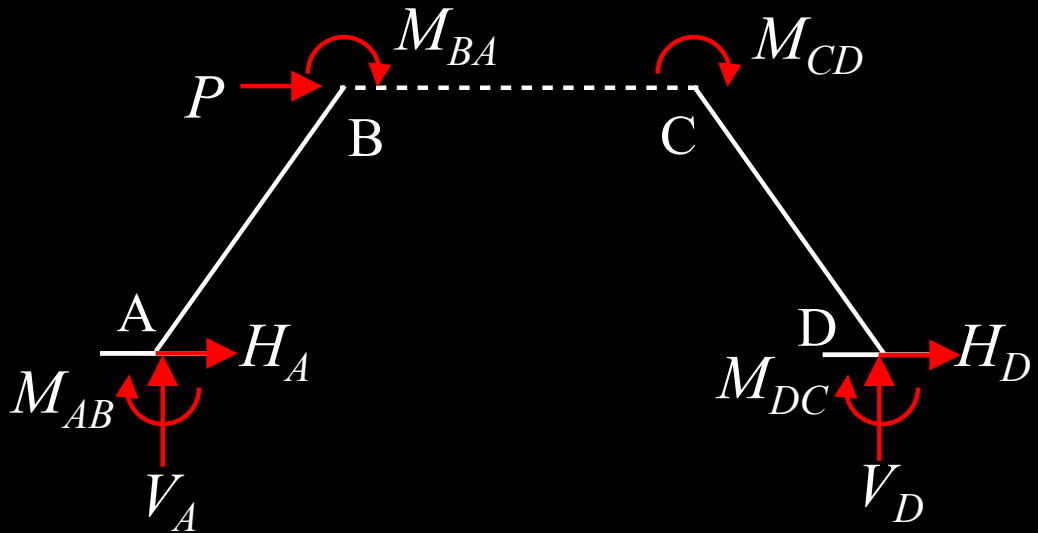


(c) 全体骨組

$$\begin{cases} \Sigma X = 0 \Rightarrow H_A + H_D + P = 0 \\ \Sigma Y = 0 \Rightarrow V_A + V_D = 0 \\ \Sigma M = 0 \Rightarrow M_{AB} + M_{DC} + Ph - V_D(2l_1 + l_2) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore V_D = \frac{1}{2l_1 + l_2} (M_{AB} + M_{DC} + Ph) = -V_A$$

## (d) AB材, CD材



(d) AB材, CD材

$$\begin{cases} \Sigma M = 0 \Rightarrow M_{AB} + M_{BA} + V_A l_1 - H_A h = 0 \\ \Sigma M = 0 \Rightarrow M_{CD} + M_{DC} - V_D l_1 - H_D h = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC} \\ + (V_A - V_D) l_1 - (H_A + H_D) h = 0 \end{aligned}$$



# 例題5 台形ラーメンの層方程式6 (釣合式より)

(c) 全体骨組

$$V_D = \frac{1}{2l_1 + l_2} (M_{AB} + M_{DC} + Ph) = -V_A$$

(d) AB材, CD材

$$M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC} + (V_A - V_D)l_1 - (H_A + H_D)h = 0$$

$$H_A + H_D = -P$$

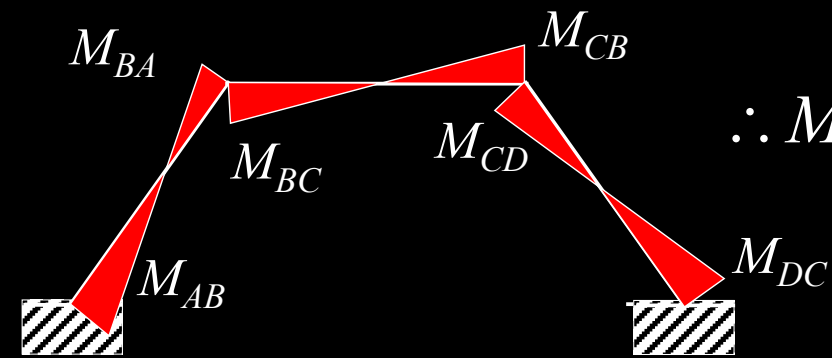
$$V_A - V_D = -V_D - V_D = -2V_D = -\frac{2}{2l_1 + l_2} (M_{AB} + M_{DC} + Ph)$$

$$\therefore M_{AB} + M_{BA} + M_{CD} + M_{DC} - \frac{2l_1}{2l_1 + l_2} (M_{AB} + M_{DC} + Ph) + Ph = 0$$

$$M_{BC} = -M_{BA}, \quad M_{CB} = -M_{CD} \quad \text{(節点方程式)}$$

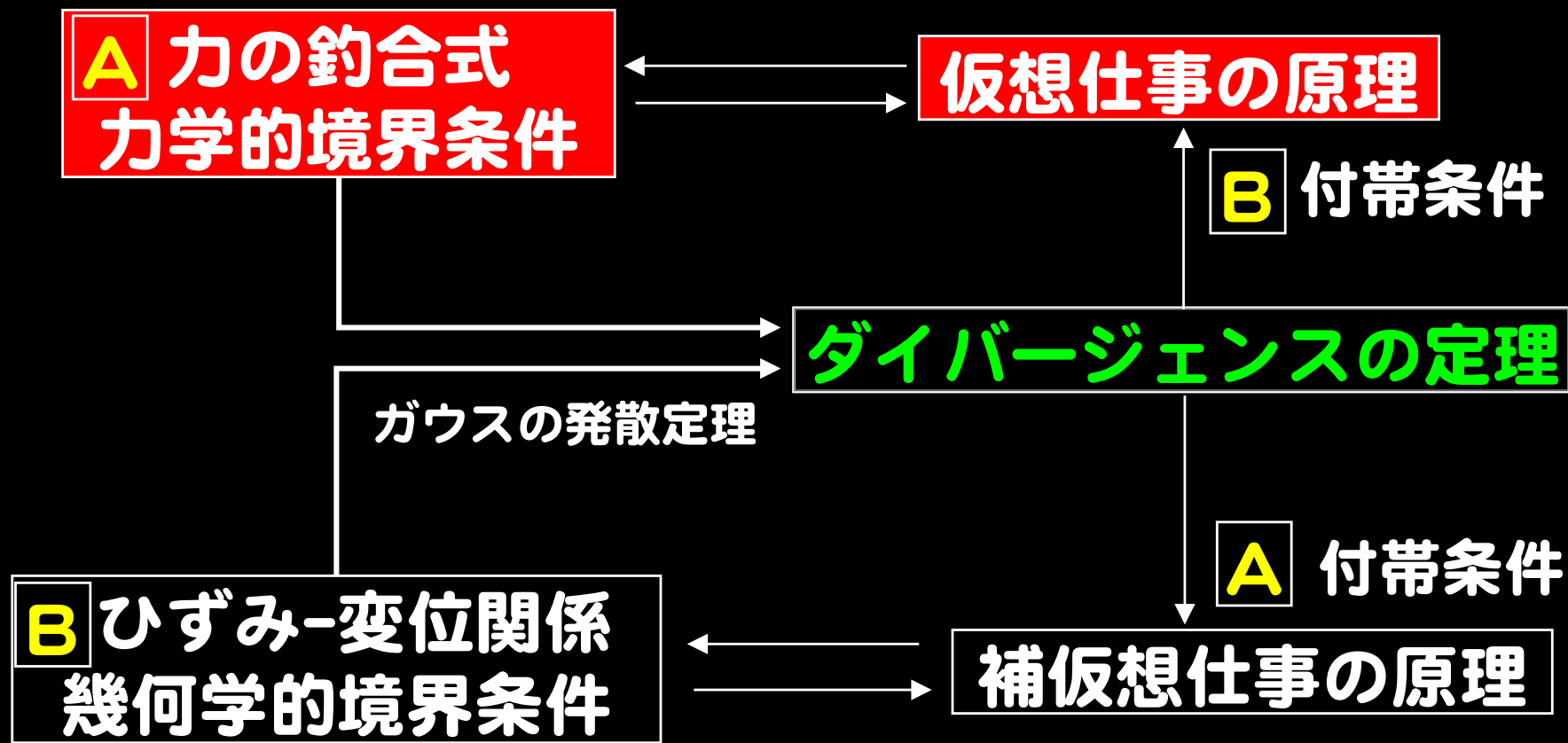
$$M_{AB} + M_{BA} + (M_{BC} + M_{CB}) \left( -\frac{2l_1}{l_2} \right) + M_{CD} + M_{DC} + Ph = 0$$

台形ラーメンの層方程式 (スライド14と同じ)



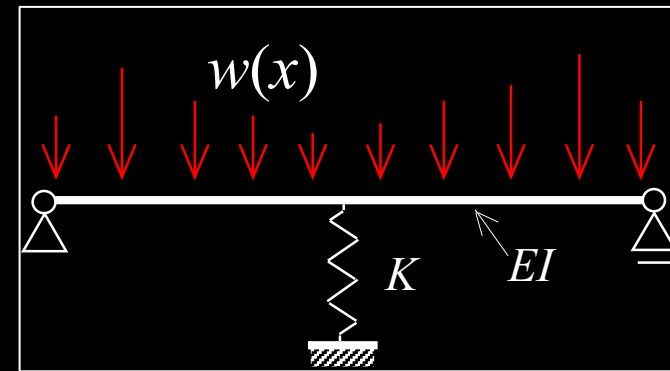
# まとめ 1

- 1) 仮想仕事の原理は力の釣合式と力学的境界条件と等価であることを復習した。



# まとめ 2

- 2) **例題1**では、仮想仕事式より**釣合い式**、**力学的境界条件**、ばねの近傍での曲げモーメントの連続条件、せん断力の釣合い式を導出した。



- 3) **例題2**では、ヒンジで回転する部分と剛体部分よりなる仮想変位・ひずみを考え、 $\delta\theta$ の回転が生じるとき、**内力のなす仮想仕事**はその点の曲げモーメントに回転角 $\delta\theta$ を乗ずることによって算定できることを示した。

# まとめ 3

- 4) **例題3と4**では、梁に集中荷重が作用するとき、2)の意味でのヒンジをもつ仮想変位・ひずみの系を適合系とすることにより、**外力とヒンジ点の曲げモーメントの関係**を導出した。
- 5) **例題5**では、**台形ラーメンの層方程式**を、仮想仕事の原理を用いて算定した。同時に、釣合式をもちいて層方程式を算定し、仮想仕事式による算定は釣合式を用いた場合に比較して、計算量が少なく簡便であることを指摘した。

# 次の解説について

最小ポテンシャルエネルギーの原理を

⑪ 最小ポテンシャルエネルギーの原理

で解説します。

# 質問・要望・意見

よりわかりやすく，役に立つ内容にしたいと考えています。

質問，要望，意見などを，どうぞ宜しくお願い致します。

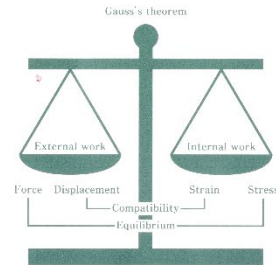
質問等の送付先は，ホームページに示しています。

# 仮想仕事の原理とエネルギー原理 トラス, 梁, 骨組

鹿島出版会 2019年9月

## 仮想仕事の 原理と エネルギー原理

トラス, 梁, 骨組



Keigo ISUDA Masae KIDO  
津田恵吾 / 城戸将江 (共著)

Virtual work and energy principles  
for trusses, beams and frames

鹿島出版会

ISBN978-4-306-03388-7  
C3052 ¥3500E

鹿島出版会

定価(本体3,500円+税)

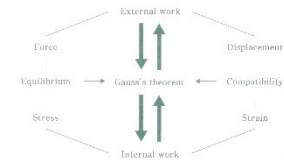


9784306033887



1923052035006

仮想仕事の  
原理と  
エネルギー原理  
トラス, 梁, 骨組



Virtual work and energy principles for trusses, beams and frames